

CEM-M0008 Estadística
Problem Set I

La fecha límite para entregar las respuestas es el miércoles 21 de Septiembre
Cada problema vale 1/4 de la calificación final

1. En una reunión, tres amigos colocan sus relojes en un sombrero y los mezclan. Después, cada uno de ellos saca un reloj sin mirar.
- (a) Calcula la probabilidad de que ninguno de los tres amigos saque su propio reloj.
- (b) Demuestra que, si el número de amigos es igual a n , entonces la probabilidad de que ninguno de ellos saque su propio reloj es igual a

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

2. Considera la colección $\mathcal{A} = \{S \subseteq \mathbb{N} : \min\{|S|, |\mathbb{N} \setminus S|\} < \infty\}$ de subconjuntos de \mathbb{N} y la función $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$P(S) := \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbb{N} \setminus S| < \infty \\ 0 & \text{si } |S| < \infty. \end{cases}$$

- (a) Demuestra que para cada $S, T \in \mathcal{A}$ tal que $S \cap T = \emptyset$, se cumple $P(S \cup T) = P(S) + P(T)$.
- (b) Demuestra que P no es σ -aditiva.

3. Una caja contiene b bolas negras y r bolas rojas. Sacamos una de las bolas aleatoriamente (sin mirar) y la volvemos a colocar en la caja. Un amigo observa el color de la bola que hemos sacado y coloca c bolas adicionales de ese color en la caja (sin informarnos del color de la bola que hemos sacado). Entonces, volvemos a sacar una bola de la caja. Demuestra que la probabilidad de que la primera bola fuera negra dado que la segunda bola es roja es $b/(b+r+c)$.

4. Una moneda es lanzada un número arbitrario de veces. Los posibles resultados de cada lanzamiento son S y A . Calcula la probabilidad de que los cuatro primeros lanzamientos resulten en:

- (a) A, A, A, A ;
- (b) A, A, A, S ;
- (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la secuencia A, A, A, S salga antes que la secuencia A, A, A, A ?