# Cálculo Diferencial II, MT0639

Escuela de Economía, Universidad de Guanajuato

Lista de Problemas III

1. Sea la función $f(x,y) := x(y^2 - 4y)\mathrm{e}^{-x}$, estamos interesados en resolver el problema

(P1) $\quad \max\limits_{(x,y)} f(x,y).$

(a) Encuentra los valores de $x$ e $y$ que satisfacen la condición necesaria de primer orden para dicho problema (P1).
(b) Comprueba que (P1) no tiene ni máximo ni mínimo globales. ¿Se verifica el Teorema de Weierstrass ?
(c) Sea $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 4\}$, argumenta que el problema

$$\text{(P)} \quad \begin{aligned} &\max_{(x,y)} f(x,y) \\ &\text{st:}(x,y) \in X \end{aligned}$$

tiene máximos y mínimos globales, y encuentralos.

2. Sea la función $g(x,y) := x^4y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2$, encuentra sus máximos y mínimos locales.

3. Demuestra, utilizando la definición de concavidad, que la función Cobb-Douglas $Y = AK^aL^b$, definida para todo $K > 0$ y $L > 0$, es cóncava si $A > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, y $a + b \leq 1$, y es estrictamente cóncava si $a$ y $b$ son estrictamente positivos y $a + b < 1$.

4. Muestra que la función $f(x,y) := (\ln x)^a(\ln y)^b$ definida para $x > 1$ e $y > 1$, y donde $a > 0$, $b > 0$, y $a + b < 1$, es estrictamente cóncava.

5. Calcula los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:
(a) $f(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$;
(b) $f(x,y,z) := x^3 + y^3 + z^3 - 9xy - 9xz + 27x$;
(c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) := 20x_2 + 48x_3 + 6x_4 + 8x_1x_2 - 4x_1^2 - 12x_3^2 - x_4^2 - 4x_2^3$.

6. Resuelve los siguientes problemas de optimización:

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} &\max_{(x,y)} x + y \\ &\text{st: } x^2 + y = 1; \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} &\max_{(x,y)} x^2 + y^2 \\ &\text{st: } x + 2y = a; \\ &a \in \mathbb{R} \ \text{ es una constante} \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} &\max_{(x,y,z)} x^2y^3z \\ &\text{st: } x + y + z = 12; \end{aligned}$$

(d) $$\min_{(x,y,z)} x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z$$
$$\text{st: } x + y + z = 1$$
$$2x - y - z = 5;$$

(e) $$\min_{(x,y,z)} x + y$$
$$\text{st: } x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$$
$$x + y + z = 1.$$

(f) $$\max_{(x,y)} xy$$
$$\text{st: } x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

7. Considera el problema de optimización para un consumidor:

$$\max U(x, y) = 10x^{1/2}y^{1/2}$$
$$\text{st: } px + qy = m,$$

donde $x$ es la cantidad consumida del bien 1, $y$ es la cantidad consumida del bien 2, y $p$, $q$, y $m$ denotan, respectivamente, el precio del bien 1, el precio del bien 2, y la renta del consumidor. Encuentra los valores de $x$ e $y$ (como funciones de $p$, $q$, y $m$) que resuelven el problema, y cálcula el valor óptimo de la función de utilidad, $U^*(p, q, m)$.

8. Considera el problema de optimización para un consumidor:

$$\max U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a}(x_1 + b - a)^{-b}$$
$$\text{st: } p_1x_1 + p_2x_2 = m,$$

donde $a$ y $b$ son constantes. Resuelve el problema y calcula las dos funciones de demanda $x_1 = D_1(p_1, p_2, m)$ y $x_2 = D_2(p_1, p_2, m)$. Comprueba qué signos tienen las derivadas parciales de $x_1$ y $x_2$ respecto de $p_1$, $p_2$ y $m$.

9. Resuelve los problemas de optimización

(a) $$\max xyz$$
$$\text{st: } x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0;$$

(b) $$\max 2y^2 - x$$
$$\text{st: } x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0;$$

(c) $$\max xy$$
$$\text{st: } x + 8y - 4 \geq 0,$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0;$$

(d) $$\max 3xy - x^3$$
$$\text{st: } 2x - y = -5,$$
$$5x + 2y \geq 37, x \geq 0,\ y \geq 0.$$

10. Escribe la formulación de Kuhn-Tucker para el problema de minimización restringida.