Teoría de Juegos, TM0858

Escuela de Economía, Universidad de Guanajuato

Lista de Problemas II

1. [Juego de la Corte] Considera el siguiente juego con información incompleta: tras el incendio de una planta química, se instruye un juicio en el que el fiscal alega que el encargado de la planta fue negligente en las medidas de seguridad de la planta química. El fiscal estima que ese cargo es cierto con probabilidad $p \in (0,1)$. Antes del juicio las partes pueden llegar a un acuerdo "fuera de la corte". Primero, el fiscal debe decidir si demandar o no al encargado de la planta. Si no lo demanda, el juego acaba. Si lo demanda, el encargado de la planta puede ofrecer al acusador un acuerdo "fuera de la corte" o mantenerse al margen y, consecuentemente, afrontar el juicio. Si el encargado ofrece un acuerdo, el fiscal puede aceptar o rechazar el acuerdo. Si lo rechaza, debe finalmente decidir si seguir adelante con la demanda, y entrar a juicio, o no.

¿Por qué es un juego con información incompleta? ¿Puedes representarlo como un juego con información imperfecta?

2. [Estructura de información de las cajas] Dos individuos desean encontrar una botella de vino que está escondida en una caja de entre tres posibles, llamadas caja 1, caja 2 y caja 3. Las cajas están cerradas y no se puede ver su contenido. Cada individuo sabe el nombre de una caja donde NO está la botella. Los nombres de las cajas que saben los individuos son distintos. Todo esto es conocido por ambos individuos. Representa el conjunto de estados de la naturaleza de esta estructura de información, el conjunto de tipos para cada uno de los jugadores, y las correspondientes funciones señal.

3. [The Good, the Bad and the Ugly, o "Il Buono, il Brutto, il Cattivo", Sergio Leone (1966)] Eli Wallach (el feo) y Clint Eastwood (el bueno) andan tras un tesoro escondido al otro lado del río. Ambos saben que está enterrado en una tumba en un cementerio. Al otro lado del río sólo hay dos cementerios (Galveston y Santa Fe). En Galveston hay tres tumbas (Jeremiah, Walles y Sanders) y en Santa Fe hay dos tumbas (Smith y otra sin nombre). Un soldado confederado moribundo, que sabía donde estaba el tesoro, alcanzó, antes de morir, a decirle el nombre del cementerio al feo y el nombre de la tumba al bueno (ver la película para los detalles).

Por supuesto Wallach e Eastwood no revelarán su información sino hasta el final de la película (cuando entra en escena Lee Van Cleef).

Especifica el conjunto de estados de la naturaleza de esta situación, el conjunto de tipos para cada uno de los jugadores y las correspondientes funciones señal.

4. [Aumann y Hart (2003)] Rowena y Colin están jugando uno de los dos juegos T ó B representados por las bimatrices de abajo, con probabilidad $1/2$ para cada uno de los juegos.

	L	R	
T	4,4	0,0	$\frac{1}{2}$
B	0,0	4,4	$\frac{1}{2}$

Rowena sabe qué juego se está jugando y Colin no lo sabe. Colin debe decidir izquierda (L) o derecha (R); Rowena no tiene ninguna elección. Antes de elegir, Colin habla con Rowena, que puede, si lo desea, decirle cual es el juego verdadero. Pero ella puede no decir la verdad y Colin no tiene ninguna forma de comprobar la veracidad de lo que dice Rowena.

Usando lo que sabes de teoría de juegos, ¿Crees que Rowena le dirá la verdad? ¿Crees que Colin le creerá?

¿Cuáles serían tus respuestas si estuviesen jugando los juegos representados abajo?

	L	R	
T	$4,6$	$6,0$	$\frac{1}{2}$
B	$0,0$	$4,4$	$\frac{1}{2}$

5. [J. D. Geanakoplos (1993)] Tres niñas están sentadas en clase alrededor de una mesa redonda. El profesor les coloca a cada una de ellas un sombrero, que puede ser blanco o rojo. Las niñas saben que el profesor tiene sólo sombreros blancos y rojos. Especifica el conjunto de estados de la naturaleza de esta situación y el conjunto de tipos para cada una de las niñas, teniendo en cuenta que no pueden ver el sombrero que tienen sobre su cabeza pero obviamente sí pueden observar los sombreros de sus compañeras.

6. [La maldición del votante swing] Considera una elección entre dos candidatos cada uno de los cuales es apoyado aproximadamente por la mitad del electorado. El candidato Bush padre o el candidato Clinton gana la elección dependiendo de los votos de dos ciudadanos. Hay dos estados del mundo (o de la naturaleza). En el estado ω_1 (Irak invade Kuwait) ambos ciudadanos coinciden en que el candidato Bush padre es el mejor; en el estado ω_2 (Irak no invade Kuwait) ambos coinciden en que el candidato Clinton es el mejor. Ambos ciudadanos obtienen un pago de 1 si el mejor candidato para ese estado de la naturaleza gana, y un pago de 0 si no es así. Si los candidatos empatan, ambos obtienen $1/2$.

El ciudadano Kane conoce el estado (recibió información privilegiada de la CIA el día antes de las elecciones), mientras que el ciudadano Harris estima que el estado es ω_1 con probabilidad 0.9 y ω_2 con probabilidad 0.1 (como todo el mundo que estaba al tanto del asunto por la prensa). Cada ciudadano puede votar por el candidato Bush padre, por el candidato Clinton, o abstenerse. Ambos votan simultaneamente.

Formula esta situación como un juego Bayesiano. ¿Podría ser una "decisión óptima" para el ciudadano Harris abstenerse?

7. Dos individuos $i = 1,2$ deben producir conjuntamente un *bien público*. Para ello, cada uno de ellos debe contribuir con una cantidad de trabajo $l_i \in [0,1]$. La productividad del individuo 2 es conocida por ambos individuos. La productividad del individuo 1 es conocida sólo por sí mismo (es decir, es información privada). *A priori*, esta productividad puede ser alta, con probabilidad p, o baja, con probabilidad $1-p$. Ambos individuos deben decidir simultaneamente la cantidad de trabajo que aportan a la producción del bien público. La cantidad de bien público producida viene dada por al siguiente función de

producción:

$$y(l_1,l_2) := \begin{cases} \sqrt{2l_1+l_2} & \text{si el individuo 1 tiene productividad alta} \\ \\ \sqrt{l_1+l_2} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con las contribuciones de cada individuo, y la producción inducida del bien público, cada individuo $i = 1,2$ obtiene una utilidad dada por la función

$$u_i(l_i, y) := (1-l_i)y^2.$$

(a) Formaliza esta situación como un juego Bayesiano.

(b) Define y calcula sus BNE.

(c) ¿Cuál es el efecto de un aumento de p (la probabilidad de que el individuo 1 sea altamente productivo) en las contribuciones de trabajo a la producción que se deciden en equilibrio?

8. Dos empresas, $i = 1,2$, que ofrecen productos diferenciados, compiten en un oligopolio à la Bertrand. La demanda de la empresa i viene dada por $q_i(p_1, p_2) := a - p_i - b_i p_{-i}$. Los costes son cero para ambas empresas. *A priori* el parámetro b_i puede tener un valor alto, b_a, con probabilidad p ó bajo, b_b, con probabilidad $1-p$. Obviamente, $0 < b_b < b_a$. Cada empresa conoce su b_i pero no el de su competidor.

Especificia esta situación como un juego Bayesiano, con *todos* sus elementos formales (conjunto de jugadores, conjunto de estados de la naturaleza, conjuntos de tipos, conjuntos de acciones, ...).

¿Qué condiciones definen un BNE en estrategias puras para este juego?

9. Dos ejercitos, $i = 1,2$ están luchando por el control de una isla que está inicialmente en manos de un batallón del ejercito 2. El ejercito 1 tiene K batallones y el ejercito 2 tiene L batallones. Cuando la isla es ocupada por un ejercito, el otro ejercito puede lanzar un ataque. El resultado de cualquier ataque es que un batallón del ejercito ocupante y un batallón del ejercito atacante son destruidos; el ejercito atacante gana y, siempre y cuando le queden batallones, ocupa la isla con un batallón.

El general de cada ejercito esta interesado en maximizar el número de batallones sobrevivientes pero también considera que la ocupación de la isla vale más que un batallón y menos que dos (si, después de un ataque, a ningún ejercito le quedan batallones, entonces el pago para cada general es 0).

Estudia esta situación como un juego en forma extensiva y, utilizando el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos, predice un ganador en función de K y L.

10. Dos jugadores, $i = 1,2$, están envueltos en la siguiente situación bajo información incompleta. El jugador 1 debe decidir entre las acciones A y B mientras que el jugador 2 debe decidir entre las acciones C y D. Los pagos resultantes son los que aparecen en las matrices:

	C	D
A	1,1	0,0
B	0,0	0,0

	C	D
A	1,2	0,4
B	0,1	1,3

El jugador 1 sabe qué matriz es la verdadera en todo momento. En cambio, el jugador 2 no está informado y cree que cada matriz se da con la misma probabilidad. Analiza esta situación como un juego Bayesiano y calcula *todos* sus BNE en estrategias puras.

11.† Dos empresas idénticas, y que ofrecen un producto homogéneo, compiten en un oligopolio à la Cournot. Cada una de las empresas, $i = 1,2$, tiene una función de costes lineal $C_i(q_i) := cq_i$. Ambas empresas se enfrentan a una función de demanda

$$P(q_1+q_2) := \max\{M - d(q_1+q_2), 0\}, \text{ con } M, d > 0.$$

Los parámetros de la demanda M y d son conocidos por ambas empresas. Los costes marginales pueden ser altos o bajos, en particular, $c \in \{0,1\}$. El valor exacto de c es conocido por la empresa 1 mientras que la empresa 2 tiene probabilidades subjetivas p y $1-p$ ($p \in (0,1)$) de que los costes sean, respectivamente, bajos o altos.

La empresa 1 decide primero su producción, que es observada por la empresa 2 antes de tomar su decision sobre cuanto producir.

Analiza esta situación como un juego de señalización, y descubre las condiciones que debe cumplir la demanda para que exista un equilibrio secuencial separador.

12.† [—Cheap Talk —Basado en Crawford y Sobel (1982)] Considera un juego con dos jugadores donde uno de ellos es un emisor de información (S) y otro es un receptor de información (R). Primero la naturaleza elige un tipo $t_S \in \{t_1, t_2\}$ para el emisor. Ese tipo elegido por la naturaleza es observado por el emisor pero no por el receptor. Entonces, el emisor envia un mensaje $m \in \{m_1, m_2\}$ al receptor. El receptor observa el mensaje enviado por el emisor y elige una accion $a \in \{a_1, a_2\}$. Los pagos para los jugadores son independientes del mensaje enviado; únicamente dependen del tipo elegido por la naturaleza y de la acción elegida por el receptor. Esos pagos vienen descritos por la matriz:

$$\begin{array}{ccc} & t_1 & t_2 \\ a_1 & x,1 & y,0 \\ a_2 & z,0 & w,1 \end{array},$$

donde $x,y,z,w \in \mathbb{R}$. Da unas condiciones que deban cumplir los parámetros x,y,z,w para que para que este juego tenga un equilibrio secuencial separador.

13.† [Samuelson (1984)] Para un comprador el valor de un bien es v_b, para un vendedor el valor de ese mismo bien es v_s. Ambos individuos saben que existen ganancias derivadas del comercio del bien, es decir $v_b > v_s$. Sin embargo, el tamaño de esas ganancias es información privada. En particular, la valoración del vendedor está distribuida uniformemente sobre $[0,1]$; la valoración del comprador es $v_b = kv_s$, donde $k > 1$ es conocido por ambos individuos. De esta forma, el vendedor conoce v_s y v_b, pero el comprador no conoce el valor exacto de v_s ni de v_b.

El comprador hace una única oferta p por el bien, que el vendedor puede aceptar o rechazar.

¿Cuál es el PBNE cuando $k < 2$?

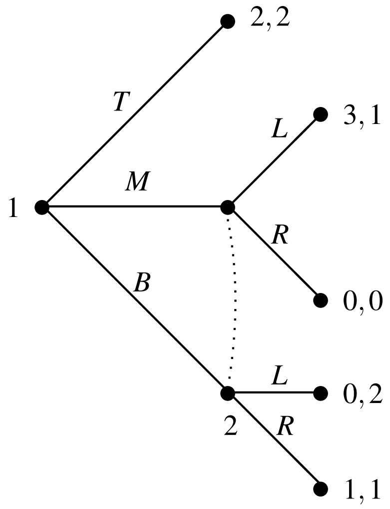
¿Cuál es el PBNE cuando $k > 2$?

14. [Subasta del dólar de Shubik] Una bandeja conteniendo un dólar y 10 centavos es subastada a dos potenciales compradores. Los dos compradores pujan públicamente por los 1.1 dólares durante un periodo ilimitado de rondas. Cada uno de los compradores tiene un presupuesto de 2 dólares, y las pujas sólo se pueden hacer en múltipos de 1 dólar (es decir, 0, 1 ó 2 dólares). Cada comprador sólo puede mantener o aumentar su puja ronda tras ronda.

El comprador 1 hace su puja en la primera ronda, el jugador 2 hace su puja en la segunda, y así sucesivamente. La bandeja con los 1.1 dólares irá al comprador cuya puja no es sobrepasada estrictamente en la siguiente ronda, pero cada participante tendrá que pagar su última puja.

¿A qué precio serán vendidos los 1.1 dólares en el equilibrio perfecto en subjuegos?

15. Considera el siguiente juego en forma extensiva:



(a) Calcula *todos* sus equilibrios de Nash en estrategias puras.

(b) Calcula *todos* sus equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias puras.

(c) Calcula *todos* sus PBNE en estrategias puras.

16. Sea Γ un juego en forma extensiva con información imperfecta. Explica los conceptos de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, equilibrio de Nash perfecto Bayesiano (PBNE), y equilibrio secuencial (debes hacerlo de forma que queden claros para alguien que jamás ha oído sobre dichos conceptos; si lo crees necesario, da una definición formal de los mismos).

Sean A, B y C, respectivamente los conjuntos de equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, PBNEs, y secuenciales de Γ. ¿Cuál de las siguientes es la relación que se da entre esos tres conjuntos?

(a) $B \subseteq C \subseteq A$;

(b) $C \subseteq B \subseteq A$;

(c) $C \subseteq A \subseteq B$;

(d) $B \subseteq A \subseteq C$.

Explica porqué es esa la relación (debes dar una explicación válida para cada relación de inclusión $\subseteq$).

17. Sea Γ un juego en forma extensiva con información imperfecta. Define formalmente qué es una estrategia mixta y qué es una estrategia de comportamiento para un jugador $i \in N$ (utiliza lo que creas conveniente: palabras, notación, u otras definiciones previas que puedas necesitar..., todo lo que creas necesario para que quien te lea entienda esos conceptos). Explica en qué se diferencian esos dos conceptos de estrategias.

¿Podríamos usar indistintamente estrategias mixtas o de comportamiento cuando buscamos soluciones de Γ? (responde "sí, siempre", "no, nunca", o "depende del juego Γ") ¿Por qué?

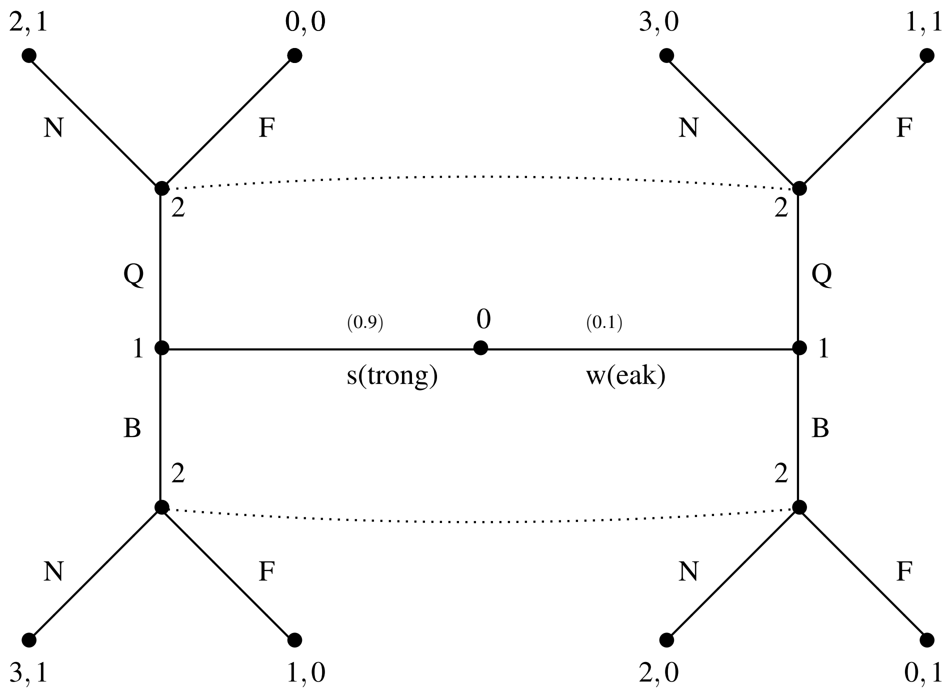
18. Dos individuos, $i = 1,2$, están envueltos en la siguiente situación bajo información imperfecta. El individuo 1 debe decidir entre las acciones A y B mientras que el individuo 2 debe decidir entre las acciones C y D. Los pagos resultantes son los que aparecen en las matrices:

	C	D
A	1,1	0,0
B	0,0	0,0

	C	D
A	1,2	0,4
B	0,1	1,3

El individuo 1 sabe qué matriz es la verdadera en todo momento. En cambio, el individuo 2 no está informado y cree que cada matriz se da con la misma probabilidad. Calcula *todas* las soluciones en estrategias puras apropiadas para este juego.

19. Considera el juego en forma extensiva representado como:



Este juego tiene dos equilibrios PBNEs (de hecho, tambien son equilibrios secuenciales), descritos como:

(1) Ambos tipos del jugador 1 eligen B. El jugador 2 elige F si observa Q, y elige N si observa B. Si el jugador 2 observa Q, entonces asigna probabilidad de al menos 0.5 que el tipo del jugador 1 es w (de weak).

(2) Ambos tipos del jugador 1 eligen Q. El jugador 2 elige F si observa B, y elige N si observa Q. Si el jugador 2 observa B, entonces asigna probabilidad de al menos 0.5 que el tipo del jugador 1 es w (de weak).

Muestra (comprueba) con detalle porqué (1) y (2) son equilibrios PBNEs de ese juego (usa los elementos necesarios de la definición de PBNE —estrategias, creencias, relaciones entre pagos esperados...— de forma que lo que argumentes pueda convencer a quien te lea).

20. Considera un juego con dos jugadores donde uno de ellos es un emisor de información (S) y otro es un receptor de información (R). Primero la naturaleza elige un tipo $t_S \in \{t_1, t_2\}$ para el emisor. Ese tipo elegido por la naturaleza es observado por el emisor pero no por el receptor. Entonces, el emisor envia un mensaje $m \in \{m_1, m_2\}$ al receptor. El receptor observa el mensaje enviado por el emisor y elige una accion $a \in \{a_1, a_2\}$. Los pagos para los jugadores son independientes del mensaje enviado; únicamente dependen del tipo elegido por la naturaleza y de la acción elegida por el receptor. Esos pagos vienen descritos por la matriz:

$$\begin{array}{ccc} & t_1 & t_2 \\ a_1 & x,1 & y,0 \\ a_2 & z,0 & w,1 \end{array},$$

donde $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Da unas condiciones que deban cumplir los parámetros x, y, z, w para que para que este juego tenga un equilibrio PBNE separador (Indica con detalle todos los elementos que necesitas para dar esas condiciones: descripción del concepto de equilibrio usado y aplicado para el caso particular de este juego, creencias, pagos esperados, relaciones entre pagos esperados ..., todo aquello que consideres necesario para ser comprendido/a con precisión.).

Pista: Fíjate que, a pesar de que los pagos están descritos por una matriz, los jugadores no mueven simultáneamente en el juego descrito.

21. Sea Γ un juego en forma extensiva con información imperfecta. Define formalmente qué es una estrategia mixta y qué es una estrategia de comportamiento para un jugador $i \in N$ (utiliza lo que creas conveniente: palabras, notación, u otras definiciones previas que puedas necesitar..., todo lo que creas necesario para que quien te lea entienda esos conceptos). Explica en qué se diferencian esos dos conceptos de estrategias.

¿Podríamos usar indistintamente estrategias mixtas o de comportamiento cuando buscamos soluciones de Γ? (responde "sí, siempre", "no, nunca", o "depende del juego Γ") ¿Por qué? (explícate con precisión)